ESTRUTURAS DE EDIFICAÇÕES

Hudson Goto

INFRAESTRUTURA

NT EDITORA

ESTRUTURAS DE EDIFICAÇÕES

Hudson Goto

INFRAESTRUTURA

NT EDITORA

Autor

Hudson Goto

Bacharel em Engenharia Civil pela Universidade Estadual de Maringá. Possui MBA em Gerenciamento de Projetos pela Fundação Getúlio Vargas (FGV/ISAE) e Especialização em Patologia das Construções pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Integrante do grupo de pesquisa em Patologia e Reabilitação das Construções. Atualmente, atua como Engenheiro Civil de manutenção de usinas da Companhia Paranaense de Energia (COPEL), principalmente nos seguintes temas: segurança de barragens, análise de instrumentação civil e manutenção de barragens de usinas hidrelétricas. Possui experiência em construções civis residenciais, comerciais e de saneamento, participando das etapas de elaboração de orçamentos, planejamento, controle e execução de obras.

Design Instrucional
Sarah Resende

Revisão
Ricardo Moura
Renata Kuhn

Editoração Eletrônica
Nathália Nunes
Kaleo Amorim

Projeto Gráfico
NT Editora

Capa
NT Editora

Ilustração
Rodrigo Souza

NT Editora, uma empresa do Grupo NT
SCS Quadra 2 – Bl. C – 4° andar – Ed. Cedro II
CEP 70.302-914 – Brasília – DF
Fone: (61) 3421-9200
sac@grupont.com.br
www.nteditora.com.br e www.grupont.com.br

Goto, Hudson.

Estruturas de edificações / Hudson Goto – 1. ed. rev. e reimpr. – Brasília: NT Editora, 2017.

236 p. il. ; 21,0 X 29,7 cm.

ISBN 978-85-8416-200-0

1. Estrutura. 2. Concreto.

I. Título

LEGENDA

ÍCONES

Prezado(a) aluno(a),
Ao longo dos seus estudos, você encontrará alguns ícones na coluna lateral do material didático. A presença desses ícones o(a) ajudará a compreender melhor o conteúdo abordado e a fazer os exercícios propostos. Conheça os ícones logo abaixo:

Saiba mais
Esse ícone apontará para informações complementares sobre o assunto que você está estudando. Serão curiosidades, temas afins ou exemplos do cotidiano que o ajudarão a fixar o conteúdo estudado.

Importante
O conteúdo indicado com esse ícone tem bastante importância para seus estudos. Leia com atenção e, tendo dúvida, pergunte ao seu tutor.

Dicas
Esse ícone apresenta dicas de estudo.

Exercícios
Toda vez que você vir o ícone de exercícios, responda às questões propostas.

Exercícios
Ao final das lições, você deverá responder aos exercícios no seu livro.

Bons estudos!

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro(a) estudante,

Seja bem-vindo(a) às **Estruturas de Edificações**!

As edificações são construções formadas por diversas estruturas e partes que interagem entre si, proporcionando aos construtores um grande desafio. Uma dessas partes são as próprias estruturas, como aquelas executadas em concreto armado, as mais comuns em nosso país. As estruturas que sustentam uma edificação são dimensionadas com suporte em princípios básicos, que se iniciam na própria mecânica elementar. Por isso, o estudo dessa temática deve englobar o máximo de conhecimento possível.

A mecânica, na qual os conceitos de estática estão inseridos, é uma ciência física, pois ela estuda os fenômenos físicos atuantes na natureza. Alguns associam a mecânica à matemática; outros, à engenharia. Ambos os pontos são justificáveis. A mecânica não se baseia simplesmente no empirismo, ou seja, na experiência e na observação, pois, como o seu foco está no raciocínio dedutivo, ela assemelha-se muito à matemática. Isso, contudo, não faz da mecânica uma ciência pura ou abstrata, mas, sim, uma ciência aplicada. Seu propósito é explicar e prever os fenômenos físicos, estabelecendo fundamentos para aplicações nas estruturas de edificações.

Diante disso, neste material, você aprenderá um pouco mais sobre os conhecimentos necessários para mais uma etapa da sua vida profissional, fazendo com que desenvolva seus trabalhos com mais qualidade. Nas primeiras lições, veremos os conceitos básicos de estática plana, resistência (ou comportamento) dos materiais e teoria das estruturas, servindo como base para entendermos melhor os conceitos que sustentam e permeiam o dimensionamento de estruturas em concreto armado. Durante o estudo das estruturas de concreto armado, conheceremos, lado a lado, os conceitos básicos da física, em conjunto com as referências normativas vigentes no Brasil.

Ao final desses estudos, você estará apto a verificar e identificar os fundamentos básicos da mecânica, de resistência dos materiais, dos pontos principais que sustentam as estruturas, da forma adequada de dimensionamento e execução de estruturas em concreto e, por fim, a avaliar essas estruturas durante o seu período de utilização e a analisar quando eventuais manifestações patológicas, como as fissuras, podem surgir. Espera-se que, com esse conhecimento, estruturas mais sustentáveis e duráveis possam ser construídas e mantidas.

Então, vamos estudar? Aproveite esta oportunidade de crescimento! Este material é mais um degrau no seu crescimento pessoal e profissional!

Bons estudos!

Hudson Goto

1 ESTÁTICA PLANA

Nesta lição, vamos aprender um pouco sobre os conceitos básicos que estarão presentes neste livro. Veremos as definições da mecânica e suas subdivisões, analisando-a tanto do ponto de vista micro, como em partículas ou pontos materiais, quanto do macro, como os corpos rígidos. Estudaremos os sistemas de força no plano, sua forma de atuação e como trabalhar com eles. Serão apresentadas, ainda, as equações que devem ser utilizadas para verificar as condições de equilíbrio de pontos materiais e corpos rígidos.

Objetivos

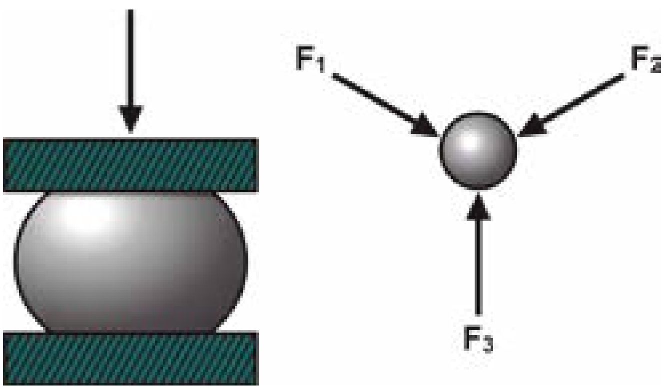
Ao finalizar esta lição, você deverá ser capaz de:

- compreender os conceitos fundamentais da mecânica dos corpos rígidos e suas unidades de medida principais;
- conhecer as leis e os princípios de atuação das forças sobre pontos materiais e corpos rígidos;
- analisar as formas possíveis de adição e decomposição dos vetores força em um sistema plano;
- avaliar as condições de equilíbrio no plano de pontos materiais e corpos rígidos;
- compreender o processo de cálculo de momentos de inércia e raios de giração.

1.1 Conceitos fundamentais e unidades de medida

A ciência que descreve e prevê as condições de repouso ou movimento dos corpos, quando submetidos a algum tipo de força, é a mecânica. Essa ciência pode ser dividida em três partes: mecânica dos fluidos, mecânica dos corpos deformáveis e mecânica dos corpos rígidos, como se observa abaixo.

Exemplos de corpo deformável (à esquerda) e de um ponto ou corpo rígido (à direita)

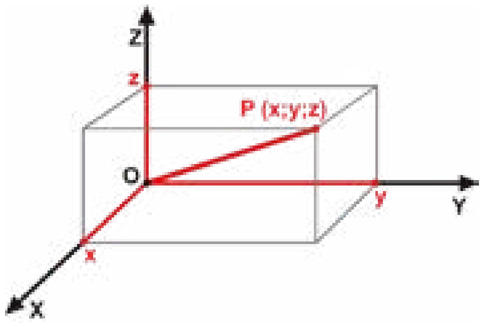


Esta última – a mecânica dos corpos rígidos – pode, ainda, ser subdividida em: estática e dinâmica. Na estática, que trata dos corpos em repouso, considera-se que eles são perfeitamente rígidos, apesar de, em condições reais, isso não ser verdadeiro, pois as estruturas nunca são absolutamente rígidas. Todavia, essas deformações são pequenas e não afetam as condições de equilíbrio da estrutura em estudo. O conhecimento sobre tais deformações será importante quando estudarmos as possibilidades de falha das estruturas devido à falta de resistência dos seus materiais constituintes. Então, esta será a nossa base de estudos e considerações nesta lição: a mecânica dos corpos rígidos em repouso, ou seja, em situação estática.

Os conceitos fundamentais da mecânica são espaço, massa, força e tempo. Utilizaremos os três primeiros conceitos nos nossos estudos.

A definição de espaço está diretamente ligada à noção de posição de um determinado ponto **P**. Essa posição é definida por um conjunto de três comprimentos medidos a partir de um único ponto de referência, ou origem, em três direções fornecidas. A esse conjunto, damos o nome de coordenadas de **P**.

Coordenadas de um ponto "P" a partir da origem "O"



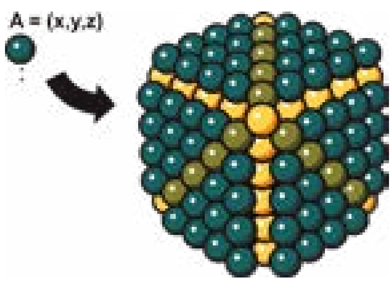
O conceito de massa é empregado para caracterizar e comparar diferentes corpos com base em experimentos mecânicos fundamentais. Pode-se citar, por exemplo, dois corpos de mesma massa que são atraídos pela Terra de forma idêntica e vão oferecer a mesma resistência sob efeito de movimentos de translação. Isto é, a massa é uma propriedade da matéria em que se pode comparar a ação de um corpo em relação a outro corpo.

Importante

A força pode ser definida como a ação de um corpo sobre o outro, sendo exercida por contato direto ou à distância (como as forças gravitacionais e magnéticas). Ela é caracterizada por seu ponto de aplicação, sua intensidade e sua direção, sendo representada por um vetor. Podemos dizer que a força é um "empurrão" ou "puxão" entre os corpos analisados. Estudaremos as condições de repouso com base nesses conceitos.

Consideraremos como partícula uma quantidade de matéria muito pequena, que ocupa, hipoteticamente, um único ponto no espaço. Como corpo rígido, entenderemos que é a combinação de uma grande quantidade de partículas que ocupam posições fixas umas em relação às outras, conforme demonstrado abaixo.

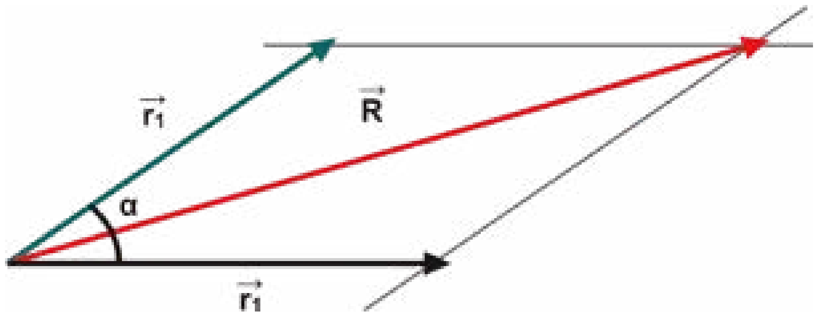
Partícula e corpo rígido



Sendo assim, nossos estudos serão baseados nos seguintes princípios:

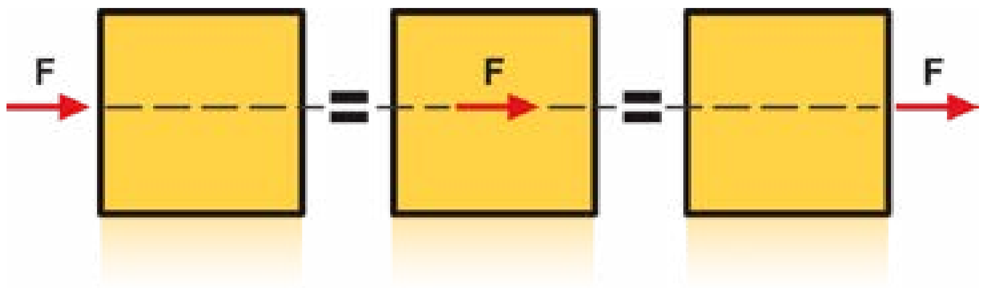
- **Lei do Paralelogramo para Adição de Forças:** estabelece que duas forças atuantes sobre uma partícula podem ser substituídas por uma única força, chamada de resultante das forças. Essa resultante é obtida traçando-se uma diagonal no paralelogramo cujos lados são iguais às forças verificadas, como demonstrado abaixo;

Lei do paralelogramo



- **Princípio da Transmissibilidade:** estabelece que as condições de equilíbrio de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força que atua em um determinado ponto de um corpo rígido for substituída por uma força de igual magnitude e direção, mesmo atuando em um ponto diferente, desde que as forças continuem sobre a mesma linha de ação, como mostrado a seguir;

Transmissibilidade de forças – forças iguais atuando em pontos diferentes sobre a mesma linha de ação



- **Primeira Lei de Newton**: se a força resultante exercida sobre uma partícula for nula (ou zero), essa partícula permanecerá em repouso (se sua situação inicial for o repouso). Caso contrário, ela passará a movimentar-se ou deslocar-se;
- **Segunda Lei de Newton:** se a força resultante exercida sobre uma partícula não for nula (ou diferente de zero), a partícula terá uma aceleração de magnitude proporcional à magnitude da resultante, possuindo a mesma direção, conforme demonstra a seguinte equação;

$$\mathbf{F = m \cdot a}$$

Onde>

F = força resultante;

m = massa;

a = aceleração da partícula.

- **Terceira Lei de Newton:** corpos em contato têm forças de ação e reação de mesma intensidade (F), linha de ação e sentidos opostos, como demonstra a figura a seguir;

- **Lei de Newton da Gravitação:** estabelece que duas partículas de massa "M" e "m" são atraídas entre si por forças iguais e opostas. Essa lei nos conduz à determinação do peso de uma partícula quando considerada a força de atração que a Terra (M) exerce sobre os corpos menores (m).

$$\mathbf{P = m \, . \, g}$$

Onde:

P = peso da partícula;

m = massa;

g = aceleração da gravidade (≈ 9,81 m/s^2).

Saiba mais

Você sabia que a base da maior parte da engenharia atual é constituída pelos conceitos fundamentais da mecânica? Esses princípios foram estabelecidos no final do século XVII, principalmente pelo cientista inglês Sir Isaac Newton, considerado um dos maiores estudiosos da história da humanidade, que publicou diversos trabalhos sobre alquimia, astronomia, física, matemática, mecânica, química e, ainda, alguns sobre teologia.

Em relação às unidades, o Sistema Internacional de Unidades (SI) é o mais utilizado. Nesse sistema, as unidades básicas são as de comprimento, massa e tempo, denominadas, respectivamente, metro (m), quilograma (kg) e segundo (s).

Como unidade derivada desse sistema, tem-se a unidade de força, expressa em newton (N), sendo definida como a força que imprime uma aceleração de 1,0 m/s^2 em uma massa de 1,0 kg, podendo ser escrita da seguite forma:

$$1\text{N} = (1{,}0\ \text{kg}) \times \left(1{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = (1{,}0\ \text{kg}) \cdot \text{m/s}^2$$

As unidades do SI formam um sistema absoluto de unidades, ou seja, como as três unidades básicas são independentes do local onde são medidas, elas podem ser utilizadas em qualquer lugar da Terra, atingindo sempre o mesmo significado.

A unidade de área, definida pelo metro quadrado (m^2), representa a área de um quadrado de 1,0 m de lado. A unidade de volume, expressa pelo metro cúbico (m^3), é o volume de um cubo de 1,0 m de lado.

Outras unidades do SI podem ser usadas para medir, por exemplo, o momento e o trabalho de uma força, entre outras grandezas, conforme descrito na tabela.

Principais unidades do SI

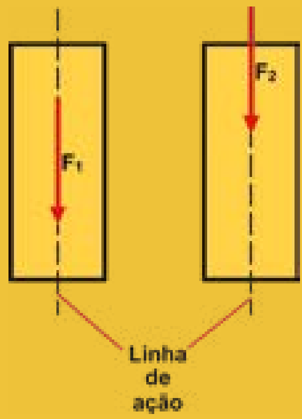
Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	-	m/s^2
Ângulo	Radiano	rad	-
Área	Metro quadrado	-	m^2
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	-	kg/m^3
Força	Newton	N	$kg.m/s^2$
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2
Tensão	Pascal	Pa	N/m^2
Volume (sólidos)	Metro cúbico	-	m^3

Podemos trabalhar com os múltiplos e submúltiplos das unidades do SI, conforme os prefixos apresentados na tabela a seguir.

Fator de multiplicação	Prefixo	Símbolo
$1.000.000.000.000 = 10^{12}$	Tera	T
$1.000.000.000 = 10^{9}$	Giga	G
$1.000.000 = 10^{6}$	Mega	M
$1.000 = 10^{3}$	Quilo	K
$100 = 10^{2}$	Hecto	h
$10 = 10^{1}$	Deca	da
$0,1 = 10^{-1}$	Deci	d
$0,01 = 10^{-2}$	Centi	c
$0,001 = 10^{-3}$	Mili	m
$0,000001 = 10^{-6}$	Micro	µ
$0,000000001 = 10^{-9}$	Nano	n
$0,000000000001 = 10^{-12}$	Pico	p

Estruturando o conhecimento

Vamos praticar? Considere a figura abaixo um corpo rígido indeformável e em repouso, submetido às forças F_1 e F_2, atuando sob a mesma linha de ação, em momentos diferentes. Para que o corpo continue em repouso e o princípio da transmissibilidade seja válido, F_1 e F_2 devem ser:



a) $F_1 > F_2$.

b) $F_1 < F_2$.

c) $F_1 = F_2$.

d) $F_1 = 0$ ou $F_2 = 0$.

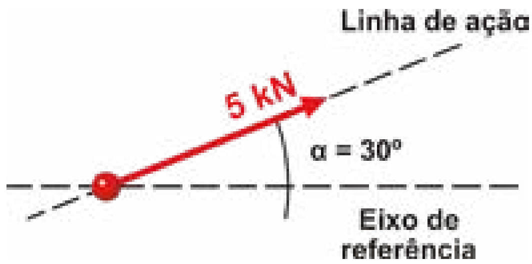
Comentário: se você marcou a letra "c", acertou! Como já vimos, para que o princípio da transmissibilidade seja válido e o corpo continue em repouso, ambas as forças devem ser iguais, considerando sempre que elas atuarão sobre a mesma linha de ação do corpo rígido.

1.2 Sistemas de forças

Uma força pode ser definida como a ação de um corpo sobre outro, com suas características de ponto de aplicação, intensidade, direção e sentido. Quando diversas forças atuam sobre uma determinada partícula, consideramos que todas têm o mesmo ponto de aplicação.

Normalmente, as unidades do SI utilizadas para medir a intensidade de forças no cálculo de estruturas são o newton (N) e o seu múltiplo, o quilonewton (kN), que equivale a 1.000 N. A direção de uma força será determinada pela sua linha de ação e sentido, em que a linha de ação será considerada uma reta infinita por onde atua a força, caracterizada pelo ângulo α formado com algum eixo fixo de referência. A intensidade da força poderá ser representada por um segmento desta linha de ação, em escala apropriada:

Direção, linha de ação e eixo de referência de uma força



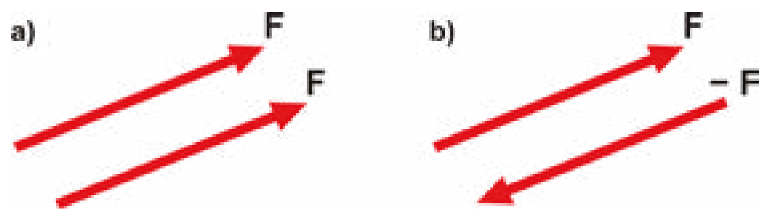
Nesse caso, as forças não obedecerão às regras de adição definidas na álgebra ou na aritmética convencional. Se duas forças de 3 kN e 4 kN, que formam um ângulo de 90º entre si, atuarem sobre uma partícula, a sua força resultante será de 5 kN, e não de 7 kN. Essas forças podem ser representadas por vetores.

Dicas

Os vetores podem ser definidos como expressões matemáticas ou quantidades que possuem intensidade, direção e sentido definidos. Em estática, podem ser encontrados ou definidos na forma de posições, forças e momentos.

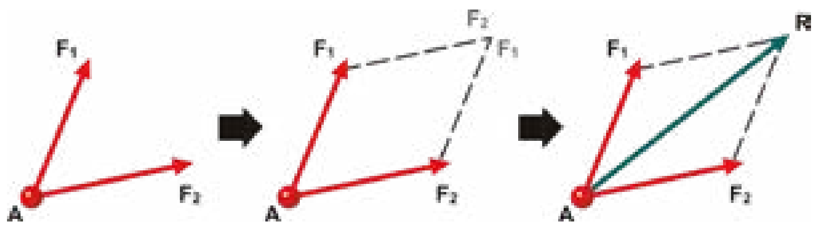
Os vetores podem ser expressos, por exemplo, pelo desenho de uma seta com indicação de uma letra usada para representá-los ($\vec{F}$, $\vec{P}$, etc.). Dois vetores são considerados iguais quando possuem a mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido, independente do seu ponto de aplicação. Vetores opostos possuem a mesma intensidade e direção, porém, sentidos opostos:

Vetores iguais (a) e Vetores opostos (b)



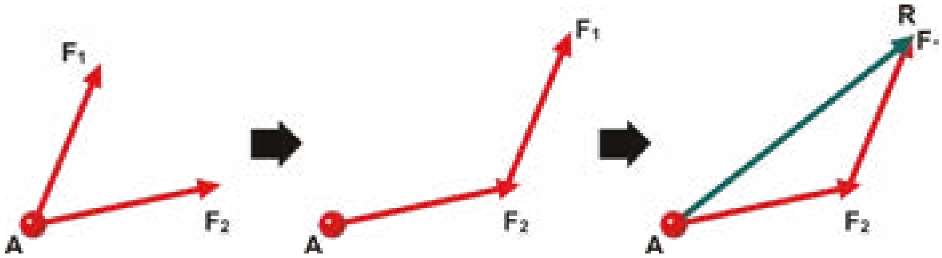
Mas, se não podemos somar algebricamente dois vetores com direções e sentidos diferentes, então como determinamos um vetor força equivalente? Uma das formas é utilizar a Lei do paralelogramo para a adição dessas forças! A soma de dois vetores força, por exemplo, F_1 e F_2, aplicados sobre um mesmo ponto A, é obtida construindo-se um paralelogramo com os mesmos vetores F_1 e F_2 como lados opostos da figura. Logo, a diagonal ou resultante força R é a soma desses vetores, como você pode ver na sequência apresentada a seguir:

Sequência para determinação da resultante R de dois vetores



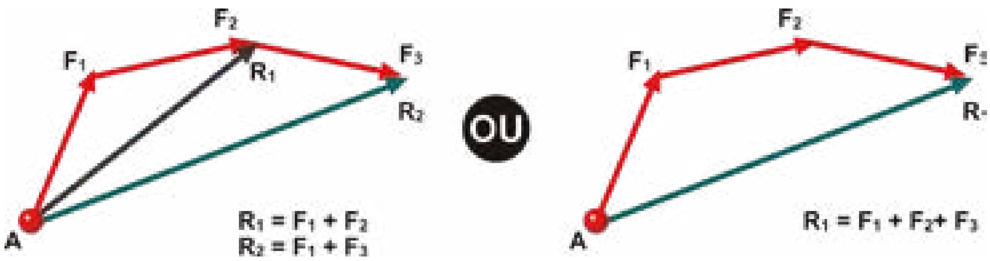
Da Lei do paralelogramo, ainda podemos deduzir outro método para determinar a soma de dois vetores, conhecido como regra do triângulo. Assim, o exemplo da figura anterior pode ser calculado por esse método, considerando apenas metade do paralelogramo, pois chegaremos à mesma resultante R obtida pelo outro método, como se verifica a seguir.

Sequência para determinação da resultante R pela regra do triângulo



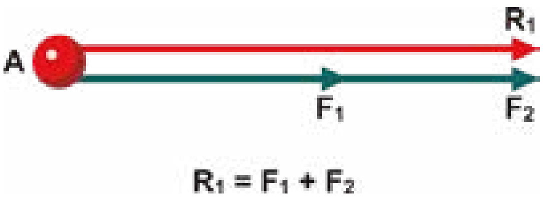
Essa regra pode ser bastante útil quando precisarmos somar três ou mais vetores atuantes sobre um mesmo ponto A, pois poderemos somá-los sempre aos pares, ou seja, dois a dois! Se os vetores forem coplanares, ou seja, estiverem no mesmo plano, a soma gráfica será fácil. Logo, nestes casos, a aplicação sucessiva da regra do triângulo é preferível à aplicação da Lei do paralelogramo, conforme se pode conferir na figura abaixo.

Diferentes formas de soma de vetores pela regra do triângulo



Podemos encontrar casos nos quais os vetores são colineares, isto é, quando ambos possuem a mesma linha de ação. Nesse caso, podemos somar algebricamente estes vetores, podendo ser considerado um caso especial, ou uma redução da Lei do paralelogramo.

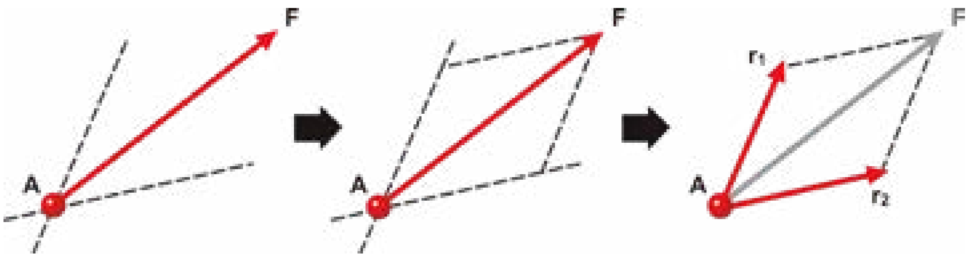
Adição de vetores colineares



Outra possibilidade de trabalharmos com vetores é fazer a decomposição dos componentes de uma força. Vimos que duas ou mais forças que atuam sobre um determinado ponto podem ser substituídas por uma única força, denominada resultante, que provoca o mesmo efeito sobre a partícula. Da mesma forma, uma única força F que atua sobre um ponto A qualquer também pode ser substituída por duas ou mais forças que, juntas, têm efeito equivalente. Essas forças são chamadas de componentes da força F, e esse processo de substituição é chamado de decomposição dos componentes da força F. Com base neste conceito, pode-se afirmar, então, que pode existir um número infinito de possíveis conjuntos de componentes.

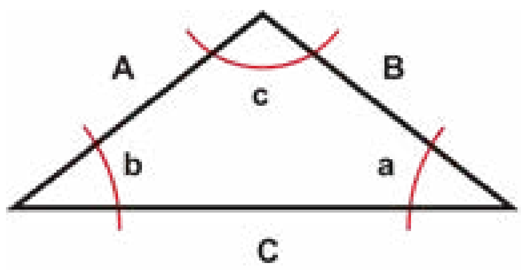
Uma das formas de fazer isto é quando conhecemos a linha de ação de cada componente. Neste caso, a intensidade e o sentido dos componentes são obtidos aplicando-se a lei do paralelogramo, traçando-se as retas paralelas a partir da ponta de F, paralelas às linhas de ação conhecidas.

Decomposição de uma força F pela lei do paralelogramo



Como os vetores força estão sempre relacionados a eixos de referência, formando ângulos com estes eixos, suas intensidades serão calculadas trigonometricamente por meio da lei dos cossenos e suas direções pela lei dos senos.

Lei dos senos e cossenos



Lei dos Senos

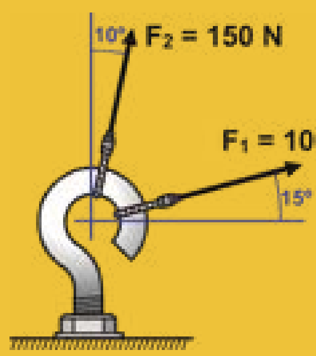
$$\frac{A}{sen\ a} = \frac{B}{sen\ b} = \frac{C}{sen\ c}$$

Lei dos Cossenos

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos\ c}$$

Estruturando o conhecimento

Vamos resolver um exercício para fixar o conteúdo visto até aqui? (HIBBELER, 2005) O parafuso da figura ao lado está submetido a duas forças F_1 e F_2. Determine a intensidade (R) da força resultante.



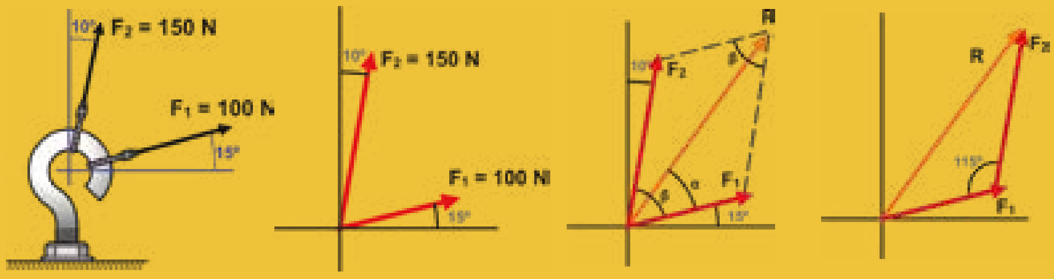
a) R = 59 N.

b) R = 54 N.

c) R = 141 N.

d) R = 213 N.

Comentário: se você marcou a letra "d", acertou! Vamos aos cálculos? De acordo com a figura apresentada, a situação inicial é a indicada como (A) na resolução. Fazendo a sua representação em um eixo definido, temos a situação indicada em (B). Pela lei do paralelogramo, podemos traçar a resultante R e indicar o ângulo α que definirá a direção. Desse forma, teremos as duas incógnitas a serem calculadas: R e α.



A B C D

O ângulo β é obtido pela subtração do ângulo de 90º entre os eixos e os ângulos de 15º de F_1 e 10º de F_2:

$$\beta = 90^{\circ} - (10^{\circ} + 15^{\circ}) = 65^{\circ}$$

Assim, podemos obter o ângulo de 115º indicado em D:

$$\frac{(360^{\circ} - 2 \times 65^{\circ})}{2} = 115^{\circ}$$

Pela regra dos triângulos e com a lei dos cossenos, podemos calcular a intensidade da resultante R, conforme representado graficamente em D:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(115^{\circ})}$$

$$= \sqrt{(100N)^2 + (150N)^2 - 2(100N) \cdot (150N) \cdot (-0{,}4226)}$$

$$\therefore \mathbf{R = 213\ N}$$

1.3 Equilíbrio de um ponto material e de corpos rígidos

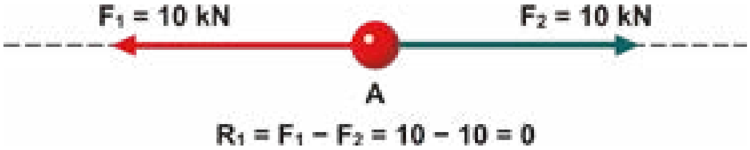
Vimos até aqui alguns métodos para a determinação de uma resultante de um conjunto de forças que atuam sobre um determinado ponto ou partícula. Porém, em alguns casos, a resultante dessas forças pode ser nula ou igual a zero. Isto nos conduz a afirmar que a partícula se encontra em equilíbrio ou repouso. Então, podemos enunciar o seguinte:

Se a resultante de todas as forças que atuam sobre uma partícula for igual a zero, então a partícula estará em equilíbrio.

Tenha sempre este conceito em mente, pois ele representa toda a base conceitual dos nossos estudos! Isso é o que garante às estruturas de edificações permanecerem "em pé". Caso esse fato não seja verdadeiro, teremos problemas, como ruínas e acidentes estruturais.

Então, uma partícula submetida à aplicação de duas forças somente estará em equilíbrio se ambas as forças tiverem a mesma intensidade e a mesma linha de ação, mas com sentidos opostos. Logo, pela lei do paralelogramo, reduzida para uma simples soma algébrica, a resultante dessas forças será igual a zero.

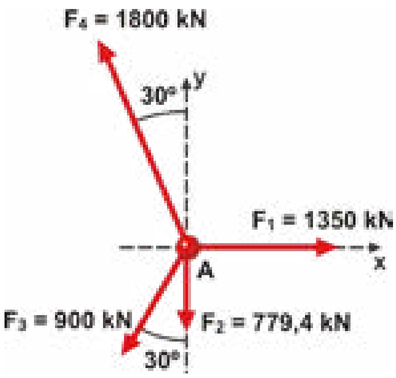
Ponto ou partícula A em situação de equilíbrio



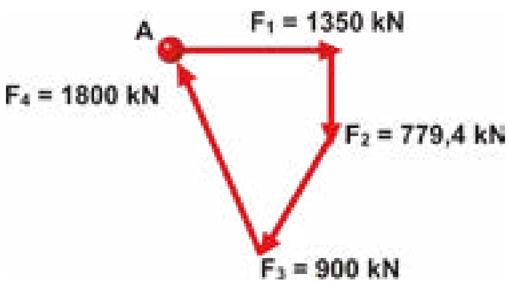
Vamos, agora, considerar um exemplo mais complexo. A seguir, em **a**, mostra-se um sistema composto por quatro forças atuando sobre a partícula A (HIBBELER, 2005). Podemos definir a sua situação de equilíbrio por duas formas: pela regra do triângulo ou algebricamente.

Pela regra do triângulo, começamos a partir do ponto A com F_1, dispondo as forças sequencialmente, sempre começando um vetor no final do vetor anterior, até chegarmos novamente no ponto A com F_4, demonstrando que a resultante das forças é zero e que o sistema se encontra em equilíbrio, conforme demonstrado em **b**.

a) sistema de quatro forças e b) disposição das forças pela regra do triângulo



a)



b)

A disposição gráfica demonstrada acima, em **b**, pode também ser escrita algebricamente para expressar as condições de equilíbrio de uma partícula como:

$$R = \Sigma F = 0$$

Se fizermos a decomposição das forças sobre os eixos x e y, teremos o seguinte:

$$(\Sigma F_x)_i + (\Sigma F_y)_j = 0 \rightarrow [(F_x)_1 + (F_x)_2 + (F_x)_3 + (F_x)_4] + [(F_y)_1 + (F_y)_2 + (F_y)_3 + (F_y)_4] = 0$$

Logo, podemos concluir que as condições necessárias para o equilíbrio de uma partícula em um plano são:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

Não se esqueça dessas condições, pois as usaremos durante as próximas lições!

Assim, pode-se demonstrar, algebricamente, que as condições de equilíbrio são satisfeitas nesse sistema de forças:

$$\Sigma F_x = 1.350 \text{ kN} - 900 \text{ kN} \cdot \text{sen}30° - 1.800 \text{ kN} \cdot \text{sen}30° = 1.350 \text{ kN} - 450 \text{ kN} - 900 \text{ kN} = 0$$

$$\Sigma F_y = -779{,}4 \text{ kN} - 900 \text{ kN} \cdot \cos30° + 1.800 \text{ kN} \cdot \cos30° = -779{,}4 \text{ kN} - 779{,}4 \text{ kN} + 1.558{,}8 \text{ kN} = 0$$

Essas condições também satisfazem a primeira Lei de Newton, pois, se a força resultante que atua sobre uma partícula é igual a zero, a partícula permanecerá em repouso, se esta era a sua situação inicial.

Importante

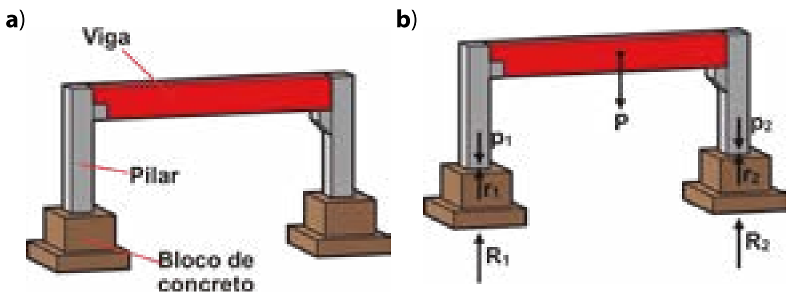
Até aqui consideramos que cada corpo poderia ser considerado como uma única partícula, porém, em situações reais, isto nem sempre é possível. Um corpo, em geral, deve ser tratado como uma combinação de partículas, levando-se em conta o seu tamanho, visto que as forças atuarão em partículas diferentes, com diferentes pontos de aplicação. Assim, em mecânica elementar, os corpos podem ser considerados como corpos rígidos, que não se deformam.

Podemos classificar as forças que atuam em corpos rígidos em dois grupos:

- **Forças externas:** representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido estudado. São responsáveis por causar o movimento do corpo ou garantir o seu repouso;
- **Forças internas:** são as forças que mantêm juntas as partículas que compõem o corpo rígido. Se o corpo rígido é composto estruturalmente de várias partes, as forças que as mantêm juntas também serão definidas como forças internas.

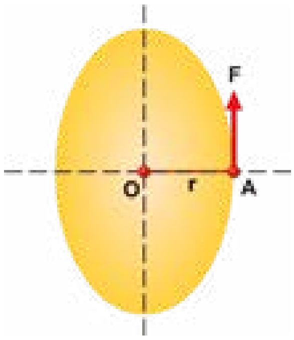
Como exemplo, vamos considerar uma estrutura pré-moldada em concreto, apoiada sobre uma fundação em blocos de concreto, como mostrado em **a**. Algumas forças externas que atuam sobre a estrutura podem ser mostradas na forma de um diagrama de corpo livre, como demonstrado em **b**. Primeiro, temos o peso próprio da viga, indicado por P, com o seu ponto de aplicação, ou seja, onde a força atua, no centro de gravidade da estrutura. O peso P, que ocorre devido ao efeito de atração da Terra sobre cada uma das partículas que compõem a viga, tende a movê-la para baixo, ou seja, fazê-la cair. Isto só não ocorre devido às forças de reação R_1 e R_2 exercidas pelo solo sobre os blocos de concreto, pilares e, consequentemente, os pontos de apoio da viga. Portanto, essas reações também devem ser consideradas como forças externas.

Sistema de quatro forças (a) e Disposição das forças pela regra do triângulo (b)



Ainda na em **b**, podemos observar a ocorrência de algumas forças internas, por exemplo, no contato entre os pilares e os blocos de concreto. A força p_1, que ocorre no pilar de concreto, tem como reação direta uma força de igual intensidade, direção e sentido oposto denominada de r_1, que equilibra o sistema, mantendo a região em repouso. Observe que, nesse caso, também podemos enunciar o princípio da transmissibilidade de forças, pois ambas as forças atuam sobre a mesma linha de ação. Mais detalhes sobre a definição das forças atuantes em estruturas de concreto veremos nas lições seguintes.

Outro conceito importante que deve ser considerado é o do momento de uma força em relação a um ponto, que pode ser definido como:



$$M_0 = r \times F$$

Onde "r" é a distância entre o ponto de referência fixo "O" do corpo rígido e o ponto de aplicação "A" do vetor força "F" atuante sobre o corpo rígido.

De forma geral, as condições necessárias e suficientes para que corpos rígidos se mantenham em equilíbrio podem ser assim descritas:

$$\Sigma F = 0; \Sigma M_0 = \Sigma(r \times F) = 0$$

Se fizermos a decomposição dessas forças nos eixos x, y e z (corpo rígido espacial), teremos o seguinte:

$$\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0; \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0;\ \Sigma M_y = 0; \Sigma M_z = 0$$

Logo, para o equilíbrio de um corpo rígido de duas dimensões, podemos reduzir as equações acima da seguinte forma:

$$\Sigma F_x = 0;\ \Sigma F_y = 0; \Sigma M_A = 0$$

Onde "A" é um ponto qualquer no plano da estrutura. Assim, essas três equações podem ser resolvidas com, no máximo, três incógnitas.

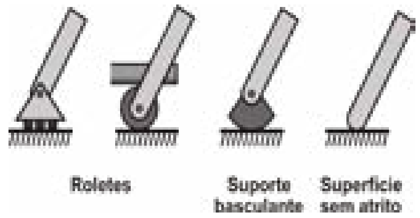
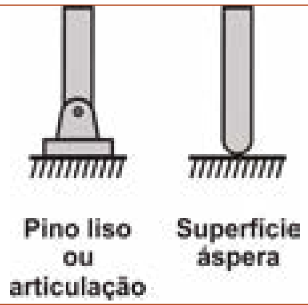
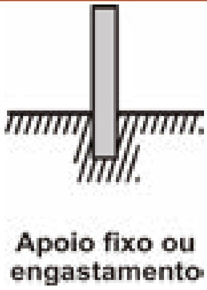
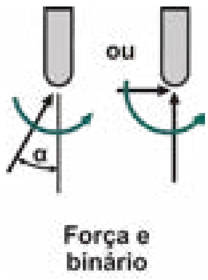
Saiba mais

Para que um problema de equilíbrio de corpo rígido possa ser resolvido, devemos considerar todas as forças que atuam sobre o corpo, pois, em caso de faltas ou acréscimos dessas forças, suas condições de equilíbrio podem ser alteradas. Dessa forma, o primeiro passo é sempre traçar o diagrama de corpo livre do corpo rígido.

Basicamente, esse diagrama consiste na descrição detalhada e completa de todas as forças e momentos atuantes no corpo, com um esboço da sua forma, representado de forma isolada ou "livre" dos elementos vizinhos, isto é, como um "corpo livre", podendo-se aplicar, então, as equações de equilíbrio.

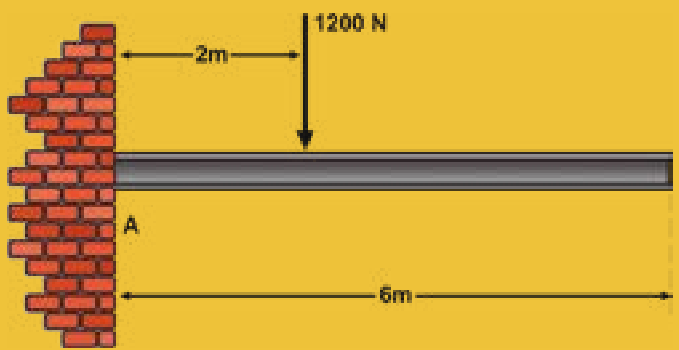
Na análise de equilíbrio de corpos rígidos, devemos identificar os tipos de reações de apoio e de conexões existentes em uma estrutura plana ou bidimensional. Na tabela a seguir, estão apresentados alguns tipos de apoios, suas reações, o número de incógnitas gerado para os cálculos e uma breve descrição.

Exemplos de reações de apoio

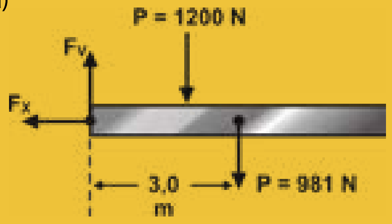
Apoio	Reação	Número de incógnitas	Descrição
		1	Apoios impedem o movimento em uma direção apenas. Linha de ação é conhecida.
		2	Apoios impedem a translação do corpo livre em todas as direções, mas não impedem o giro em torno da conexão.
		3	Engaste impede qualquer movimento do corpo livre.

Estruturando o conhecimento

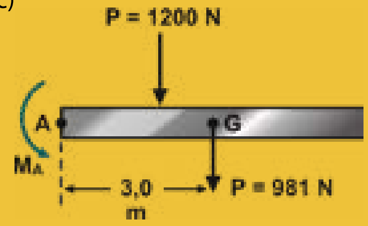
Vamos praticar? (HIBBELER, 2005) De acordo com a figura, assinale a alternativa que apresenta o diagrama de corpo livre corretamente desenhado. Considere a viga com massa de 100 kg.



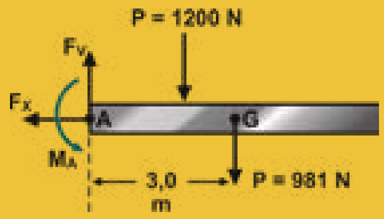
a)



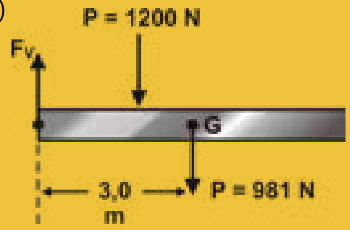
c)



b)



d)



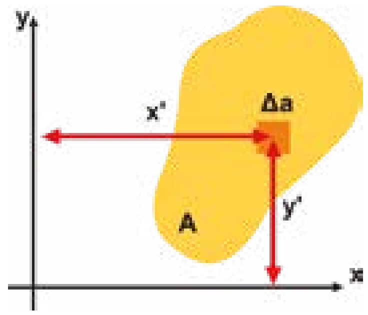
Comentário: se você marcou a letra "b", acertou! A parede fixa que serve de apoio para a viga, definido como ponto "A" no diagrama de corpo livre, proporciona restrição nas três direções, gerando três reações atuantes na viga no referido ponto, definidos como F_x, F_y e M_A, traçados em uma direção arbitrada. As intensidades dos vetores são incógnitas a serem resolvidas pelas equações de equilíbrio e o sentido das forças foram adotados. O peso da viga, atuando no centro de gravidade "G", pode ser definido como: $P = 100\ kg \times 9{,}81\ m/s^2 = 981\ N$.

1.4 Momento de inércia e raio de giração

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre o momento de inércia propriamente dito, vamos definir alguns pontos que precedem este assunto.

Consideremos uma superfície plana qualquer de área "A", inserida em um sistema de eixos ortogonais x, y. Seja Δa um elemento constituinte de parte desta área e x' e y' as coordenadas desse elemento em relação ao sistema de eixos, demonstrado na figura a seguir.

Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo



Com base nisso, podemos definir o momento estático ou de 1ª ordem como o produto da área do elemento (Δa) por sua ordenada em relação ao eixo considerado, conforme a equação:

$$S_x = y' \times \Delta a \text{ ou } S_y = x' \times \Delta a$$

Logo, podemos considerar que o momento estático para toda a superfície A é a soma dos momentos estáticos em relação ao mesmo eixo de cada elemento Δa. O momento estático pode ser expresso em cm^3, m^3, ou outra unidade, podendo ter sinal positivo ou negativo, dependendo do sinal da ordenada envolvida. O momento estático será nulo em relação a qualquer eixo que passe pelo seu centro de gravidade.

Já a definição de momento de inércia ou momento de 2ª ordem, em termos gerais, pode ser dada como a resistência que um determinado corpo oferece ao movimento de rotação. Se considerarmos o mesmo elemento Δa da figura anterior, o momento de inércia deste corpo, em relação a um eixo qualquer, será, por definição, o produto deste elemento pelo quadrado da distância do eixo, conforme a equação:

$$I_x = y'^2 \times \Delta a \text{ ou } I_y = x'^2 \times \Delta a$$

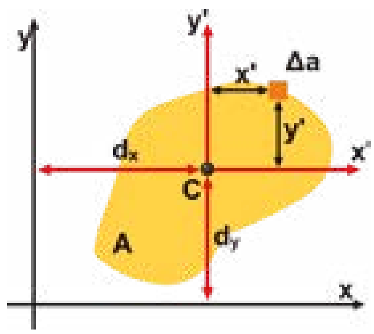
Da mesma forma, o momento de inércia para toda a superfície A é a soma de todos os momentos de inércia em relação ao mesmo eixo de cada elemento Δa. Suas unidades, normalmente, são expressas em cm^4, m^4, mm^4, entre outras. O momento de inércia pode apresentar algumas propriedades importantes que devem ser consideradas, tais como:

- são sempre grandezas positivas, pois a massa é uma grandeza positiva e o quadrado de qualquer distância também;
- será somente nulo quando for calculado para pontos sobre a base de referência (plano, eixo ou ponto);
- nunca é negativo.

Saiba mais

Em alguns casos, é conveniente determinarmos o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo considerado, processo denominado teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner.

Quando o momento de inércia de uma área em relação a um eixo passa pelo seu centroide, pode-se determinar o momento de inércia da área em relação a esse eixo paralelo. Como exemplo, vamos considerar o momento de inércia da área Δa, destacado em laranja da figura a seguir, em relação ao eixo x:



Superfície A

Considere que os eixos x′ e y′ passam pelo centroide da superfície A. O elemento Δa encontra-se a uma distância y′ do eixo x′, enquanto a distância fixa entre os eixos paralelos x e x′ é d_y. Considerando que o momento de inércia de Δa em relação ao eixo x é $(y' + d_y)^2 \cdot \Delta a$, então, podemos considerar que o somatório de todos os elementos Δa da área A pode ser expresso pela equação a seguir:

$$I_x - I_{x'} + A \cdot d_y^{\,2}$$

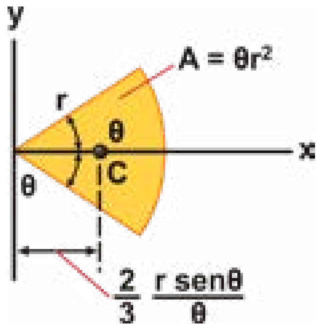
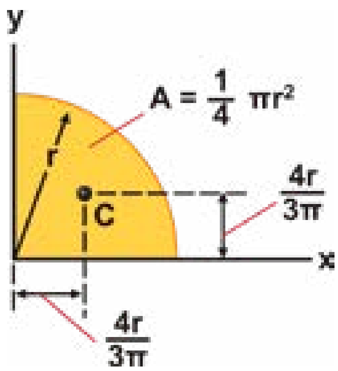
Onde $I_{x'}$ é o momento de inércia da área em relação ao eixo que passa pelo centroide e A é a área total da superfície. De forma similar podemos escrever para o eixo y′, conforme mostra a próxima equação.

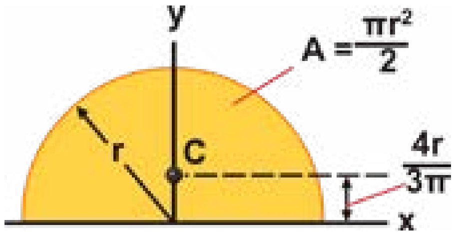
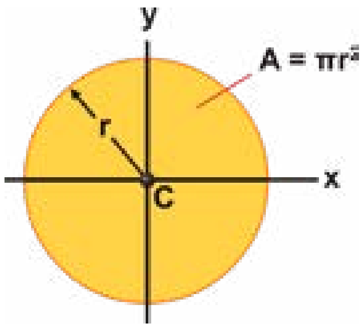
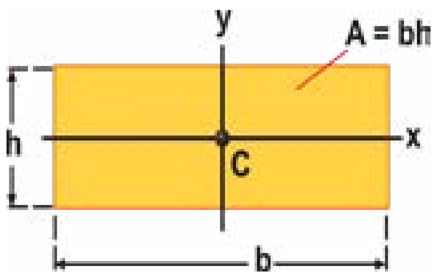
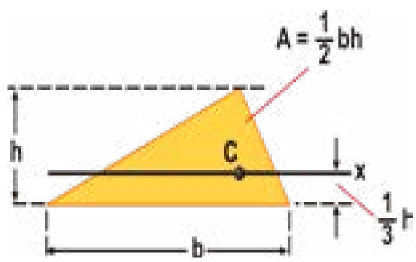
$$I_y - I_{y'} + A \cdot d_x^{\,2}$$

Assim, podemos enunciar o teorema de Steiner: o momento de inércia de uma superfície ou corpo relativo a um eixo "x" qualquer é dado pela soma do momento de inércia relativo a um eixo x′ paralelo que passa pelo seu centroide, como o produto do elemento ou massa Δa da superfície ou corpo, pelo quadrado da distância entre os dois eixos.

Os momentos de inércia de algumas áreas mais utilizadas podem ser verificados na tabela a seguir (HIBBELER, 2005):

Exemplos de momentos de inércia de áreas conhecidas

Posição do centroide	Momento de inércia (área)
 **Área de setor circular**	$I_x = \frac{1}{4} r^4 \left(\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}2\theta\right)$ $I_y = \frac{1}{4} r^4 \left(\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}2\theta\right)$
 **Área de quarto de círculo**	$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$ $I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$

Posição do centroide	Momento de inércia (área)
 **Área de semicírculo**	$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
 **Área do círculo**	$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
 **Área do retângulo**	$I_x = \frac{1}{12} bh^3$ $I_y = \frac{1}{12} hb^3$
 **Área do triângulo**	$I_x = \frac{1}{36} bh^3$

O raio de giração, considerado outra propriedade do momento de inércia, é a distância, em relação à base de referência, onde se deve concentrar toda a massa do elemento para que o momento de inércia, em relação a essa base, permaneça constante. Assim, podemos escrever a seguinte equação:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \text{ou} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Essa propriedade possui unidades de comprimento e é uma quantidade normalmente utilizada em projetos de colunas ou pilares em mecânica estrutural. O raio de giração só pode ser determinado quando as áreas e os momentos de inércia forem conhecidos.

Importante

Em algumas situações, temos que calcular o momento de inércia de áreas compostas, que são constituídas por diversas áreas ou formas geométricas relativamente mais simples, como retângulos, triângulos, círculos, entre outros.

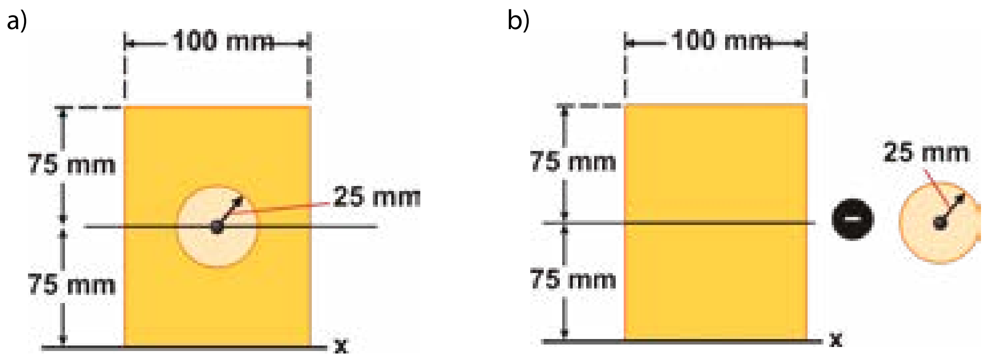
Considerando sempre que o momento de inércia de cada uma dessas áreas é conhecido ou possa ser determinado em relação a um eixo comum, então, o momento de inércia da área composta é o resultado da soma algébrica dos momentos de inércia de todas as suas partes constituintes.

Para esse cálculo, podemos seguir o seguinte roteiro:

1) Divida a área principal em áreas menores conhecidas, indicando a distância perpendicular do centroide de cada área menor até o eixo de referência;
2) Utilize o teorema dos eixos paralelos. Determine o momento de inércia de cada uma das áreas menores em relação aos eixos que passam pelos centroides, que são paralelos ao eixo de referência. Se os eixos dos centroides de cada área menor não coincidirem com os eixos de referência, então pode-se utilizar a equação $I = I + A \cdot d^2$;
3) O momento de inércia total da área considerada, em relação ao eixo de referência, é o resultado da soma dos resultados de cada área menor. Caso alguma destas áreas menores forem "vazios", o seu momento de inércia será subtraído do momento de inércia da área total.

Com o exemplo da figura a seguir, à esquerda, podemos verificar esse processo de cálculo do momento de inércia de uma área composta (HIBBELER, 2005).

Área composta (a) e Áreas separadas (b)



A área da figura **a** pode ser separada em duas áreas conhecidas: o círculo de raio 25 mm e o retângulo de 100 mm x 150 mm, cada qual com seu respectivo centroide, conforme indicado na figura **b**.

A partir do teorema dos eixos paralelos, podemos calcular os momentos de inércia em relação ao eixo x:

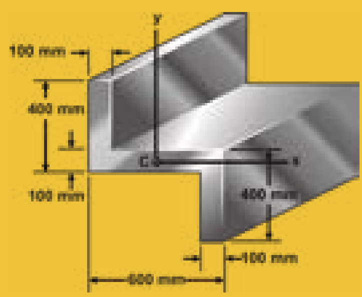
Círculo	$I_x = \overline{I}_x + A\,d_y^{\,2} = \frac{1}{4}\pi(25)^2 + \pi(25)^2(75)^2 = 11{,}4(10)^6\ mm^4$
Retângulo	$I_x = \overline{I}_x + A\,d_y^{\,2} = \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112{,}5(10)^6\ mm^4$

O momento de inércia total da área composta pode ser escrito da seguinte forma:

$$I_x = -11{,}4(10)^6\,mm^4 + 112{,}5(10)^6\,mm^4 = 101(10)^6\,mm^4$$

Estruturando o conhecimento

Vamos praticar os conceitos vistos até aqui? (HIBBELER, 2005) De acordo com a figura a seguir, assinale a alternativa que define corretamente o momento de inércia total em relação aos eixos x e y, que passam pelo seu centroide.

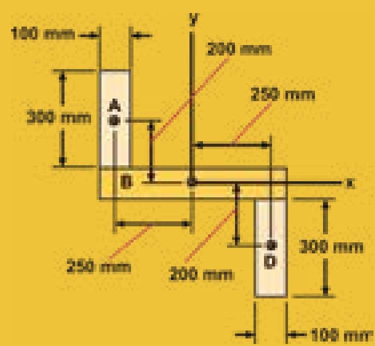


a) $I_x = 5{,}60(10^9)\ mm^4$; $I_y = 2{,}90(10^9)\ mm^4$.

b) $I_x = 2{,}00(10^9)\ mm^4$; $I_y = 6{,}30(10^9)\ mm^4$.

c) $I_x = 2{,}90(10^9)\ mm^4$; $I_y = 5{,}60(10^9)\ mm^4$.

d) $I_x = 5{,}90(10^9)\ mm^4$; $I_y = 2{,}60(10^9)\ mm^4$.



Comentário: se você marcou a letra "c", acertou! Primeiramente, devemos identificar as áreas menores com seus respectivos centroides, conforme identificado na figura ao lado. Note que podemos dividi-lo em três retângulos: A, B e D. A partir do teorema dos eixos paralelos e utilizando a equação da tabela "Exemplos de momentos de inércia de áreas conhecidas" (p. 25) para o momento de inércio de um retângulo, temos o seguinte:

Para o retângulo A:

$$I_x = \overline{I}_x + A\,d_y^{\,2} = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 = 1{,}425(10)^9\ mm^4$$

$$I_y = \overline{I}_y + A\,d_x^{\,2} = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 = 1{,}90(10)^9\ mm^4$$

Para o retângulo B:

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0{,}05(10)^9\ mm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1{,}80(10)^9\ mm^4$$

Para o retângulo D:

$$I_x = \bar{I}_x + A\,d_y^{\,2} = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2 = 1{,}425(10)^9\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\,d_x^{\,2} = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2 = 1{,}90(10)^9\ \text{mm}^4$$

Logo, somando-se os momentos de inércia para a seção, temos:

$I_x = 1{,}425(10)^9 + 0{,}05(10)^9 + 1{,}425(10)^9 = 2{,}90(10)^9\ \text{mm}^4$

$I_y = 1{,}90(10)^9 + 1{,}80(10)^9 + 1{,}90(10)^9 = 5{,}60(10)^9\ \text{mm}^4$

Resumindo

Nesta lição, estudamos os conceitos básicos da mecânica, bem como as principais unidades usualmente adotadas no Sistema Internacional. Avançando pela mecânica vetorial, vimos as leis e princípios que atuam sobre um sistema de forças reais. Foram apresentados, ainda, passo a passo, alguns exemplos que ilustram esses conceitos, buscando visualizar e fixar melhor estes tópicos. Complementando, aprendemos quais as condições que devem ser verificadas e respeitadas para que partículas e corpos rígidos mantenham-se em equilíbrio. Tais conceitos servirão de base para os nossos estudos futuros! Não se esqueça deles!

Veja se você se sente apto a:

- identificar os princípios da mecânica básica nas estruturas de edificações;
- explicar o trabalho com vetores forças, seja calculando suas resultantes ou fazendo sua decomposição;
- descrever se um ponto material ou um corpo rígido encontra-se em situação de equilíbrio;
- aplicar os conceitos de momento de inércia e raio de giração em estruturas de edificações.

Parabéns, você finalizou esta lição!

Agora responda às questões ao lado.

Exercícios

Questão 1 – A mecânica é a ciência que descreve e prevê as condições de repouso ou movimento dos corpos quando submetidos a algum tipo de força. Ela pode ser dividida em três partes. Assinale a alternativa que apresenta corretamente a referida divisão.

a) Mecânica dos corpos rígidos, dos fluidos e dos pontos materiais.

b) Mecânica dos vetores, dos corpos rígidos e dos líquidos.

c) Mecânica dos corpos rígidos, dos corpos deformáveis e dos fluidos.

d) Mecânica das partículas, dos corpos deformáveis e dos corpos rígidos.

Questão 2 – Assinale a alternativa que define a parte da mecânica dos corpos rígidos que estuda os corpos em repouso ou com velocidade igual a zero.

a) Estática.

b) Dinâmica do repouso.

c) Dinâmica dos corpos rígidos.

d) Estática acelerada.

Questão 3 – O conjunto de três comprimentos medidos a partir de um único ponto de referência, ou origem, em três direções fornecidas, é denominado:

a) coordenadas.

b) volume.

c) momento de inércia.

d) raio de giração.

Questão 4 – A força é definida como a ação de um corpo sobre o outro, que pode ser feito por contato direto ou à distância. De acordo com os conceitos estudados, quais os componentes que definem a atuação de uma força?

a) Centro de gravidade, dimensão e intensidade.

b) Ponto de aplicação, intensidade, direção e sentido.

c) Ponto de aplicação, direção e velocidade.

d) Intensidade, centro de gravidade e ponto de aplicação.

Questão 5 – Assinale a alternativa que define corretamente a seguinte descrição: "se um corpo estiver em equilíbrio, suas condições iniciais permanecerão inalteradas se a força que atua em um determinado ponto do corpo rígido for substituída por uma força de igual magnitude e direção, desde que elas continuem sobre a mesma linha de ação".

a) Lei do Paralelogramo para Adição de Forças.

b) Segunda Lei de Newton.

c) Primeira Lei de Newton.

d) Princípio da Transmissibilidade.

Questão 6 – Um corpo, definido como o conjunto de partículas, que em mecânica elementar é considerado como corpo rígido, pode sofrer a atuação de forças:

a) estáticas e dinâmicas.

b) constantes e estáticas.

c) diretas e indiretas.

d) externas e internas.

Questão 7 – Qual o processo utilizado nos casos em que é conveniente a determinação do momento de inércia em relação a um eixo paralelo?

a) Teorema de Steiner.

b) Teorema dos triângulos.

c) Regra dos triângulos.

d) Teorema das retas colineares.

Questão 8 – Os apoios de pino liso ou superfície áspera, caracterizados por impedirem a translação do corpo livre em todas as direções, mas não impedindo o giro em torno da conexão, apresentam quantas incógnitas a serem definidas pelas equações de equilíbrio?

a) 1.

b) 3.

c) 2.

d) 4.

Questão 9 – Assinale a alternativa que define corretamente a seguinte descrição: "apoio que impede qualquer tipo de movimento do corpo livre".

a) Apoio fixo ou engaste.

b) Apoio de superfície áspera.

c) Apoio basculante.

d) Apoio reativo.

Questão 10 – Assinale a alternativa que define corretamente a seguinte descrição: "distância em relação à base de referência na qual se deve concentrar toda a massa do elemento para que o momento de inércia permaneça constante".

a) Centro de massa.

b) Centroide.

c) Momento estático.

d) Raio de giração.